

# Spis treści

Wstęp.....	7
<b>1 Rachunek prawdopodobieństwa.....</b>	<b>10</b>
1.1 Prawdopodobieństwo .....	11
1.2 Zmienne losowe .....	14
1.3 Rozkłady prawdopodobieństwa .....	22
1.3.1 Rozkłady skokowe .....	23
1.3.2 Rozkłady ciągłe .....	27
1.4 Wektory losowe .....	38
1.5 Statystyki pozycyjne .....	46
1.6 Rekordy .....	48
1.7 Procesy losowe .....	49
<b>2 Statystyka.....</b>	<b>54</b>
2.1 Estymacja .....	56
2.2 Testowanie hipotez .....	60
<b>3 Ubezpieczenia majątkowe.....</b>	<b>65</b>
3.1 Ryzyka i umowy ubezpieczeniowe.....	66
3.1.1 Nadwyżki ryzyk.....	67
3.1.2 Porządkowanie ryzyk.....	69
3.2 Modele ryzyka ubezpieczeniowego.....	72
3.2.1 Model ryzyka indywidualnego.....	72
3.2.2 Model ryzyka łącznego.....	73
3.2.3 Aproksymacja rozkładu łącznej wartości szkód.....	77
3.3 Teoria ruiny.....	78
3.3.1 Proces nadwyżki z czasem dyskretnym.....	78
3.3.2 Proces nadwyżki z czasem ciągłym.....	80
3.3.3 Model klasyczny .....	80
3.3.4 Aproksymacje prawdopodobieństwa ruiny w modelu klasycznym.....	87
3.3.5 Model Sparre Andersena.....	88
3.3.6 Model dyfuzyjny.....	91

3.4	Kalkulacja składki w jednorodnych portfelach ryzyk . . . . .	92
3.4.1	Wybrane własności składek ubezpieczeniowych . . . . .	92
3.4.2	Wybrane zasady kalkulacji składek ubezpieczeniowych . . . . .	93
3.5	Kalkulacja składki w niejednorodnych portfelach ryzyk . . . . .	96
3.5.1	Modele credibility . . . . .	96
3.5.2	Systemy bonus-malus . . . . .	100
3.6	Reasekuracja . . . . .	101
3.6.1	Typy kontraktów reasekuracyjnych . . . . .	101
3.6.2	Optymalne formy reasekuracji . . . . .	103
3.7	Kalkulacja rezerw na szkody zaistniałe lecz nie zgłoszone . . . . .	104
3.7.1	Metoda chain-ladder . . . . .	104
3.7.2	Metoda Bornhuettera-Fergusona . . . . .	105
<b>4</b>	<b>Matematyka finansowa . . . . .</b>	<b>107</b>
4.1	Oprocentowanie . . . . .	107
4.1.1	Kapitalizacja zgodna z dołu . . . . .	109
4.1.2	Kapitalizacja niezgodna z dołu . . . . .	110
4.1.3	Kapitalizacja z góry . . . . .	113
4.1.4	Inflacja, realna stopa procentowa . . . . .	114
4.1.5	Losowe stopy procentowe . . . . .	114
4.2	Przepływy kapitałowe . . . . .	116
4.2.1	Inwestycje . . . . .	117
4.2.2	Badanie wrażliwości metody NPV . . . . .	119
4.3	Renty pewne . . . . .	121
4.3.1	Renty o stałych ratach płatne co roku . . . . .	122
4.3.2	Renty o zmiennych ratach płatne co roku . . . . .	123
4.3.3	Renty o stałych ratach płatne $m$ razy w roku przez $n$ lat . . . . .	125
4.3.4	Renty płatne w sposób ciągły . . . . .	127
4.4	Spląty długów . . . . .	128
4.4.1	Podstawowe pojęcia . . . . .	129
4.4.2	Plany spląty długów . . . . .	130
4.4.3	Ciągłe spląty długów . . . . .	133
4.5	Bony skarbowe, obligacje . . . . .	134
4.6	Weksle i certyfikaty depozytowe . . . . .	137
4.7	Amortyzacja środków trwałych . . . . .	138
4.8	Leasing . . . . .	139
4.9	Akcje . . . . .	140
4.10	Kontrakty pochodne . . . . .	144

---

<b>5 Ubezpieczenia życiowe</b> .....	151
5.1 Teoria wymieralności.....	151
5.1.1 Podstawowe pojęcia.....	152
5.1.2 Analityczne prawa wymieralności.....	153
5.1.3 Całkowicie przeżyta liczba lat.....	154
5.1.4 Tablice wymieralności.....	154
5.1.5 Hipotezy o wymieralności w ułamkowych okresach życia.....	156
5.1.6 Wzory.....	156
5.2 Ubezpieczenia na życie.....	159
5.2.1 Składki jednorazowe netto w ciągłych ubezpieczeniach na życie.....	159
5.2.2 Składki jednorazowe netto w dyskretnych ubezpieczeniach na życie.....	163
5.2.3 Zależności między składkami netto w ubezpieczeniach ciągłych i dyskretnych.....	166
5.2.4 Wzory.....	167
5.2.5 Funkcje i wzory komutacyjne.....	168
5.3 Renty życiowe.....	169
5.3.1 Renty życiowe ciągłe.....	169
5.3.2 Wartości obecne dyskretnych rent życiowych.....	172
5.3.3 Zależności między rentami życiowymi a ubezpieczeniami.....	175
5.3.4 Renty życiowe – wzory.....	176
5.3.5 Renty płatne w podokresach.....	177
5.3.6 Wzory komutacyjne dla rent.....	178
5.3.7 Wzory komutacyjne przy hipotezie DL.....	178
5.3.8 Wzory komutacyjne dla rent przy założeniu jednostajnej wymieralności w ciągu roku.....	179
5.4 Składka i rezerwy netto.....	179
5.4.1 Pojęcie składki i rezerwy netto.....	179
5.4.2 Umowy całkowicie ciągłe.....	180
5.4.3 Umowy całkowicie dyskretnie.....	182
5.4.4 Umowy ze składkami płatnymi na początku każdego podokresu.....	184
5.4.5 Umowy mieszanego typu.....	184
5.4.6 Rezerwy przy składkach jednorazowych netto.....	185
5.4.7 Ogólny model ciągły.....	185
5.4.8 Ogólny model dyskretny.....	187
5.4.9 Konwersja polisy.....	188

---

5.4.10	Wzory.....	189
5.4.11	Składki netto przy wykorzystaniu funkcji komutacyjnych.....	190
5.5	Składka i rezerwy brutto.....	190
5.5.1	Rodzaje kosztów w ubezpieczeniach na życie.....	191
5.5.2	Składka i rezerwa brutto.....	191
5.5.3	Składki i rezerwy brutto w wybranych modelach.....	192
5.5.4	Metoda Zillimera.....	194
5.6	Model szkodowości wielorakiej.....	194
5.6.1	Czas i przyczyna wyjścia ze statusu.....	195
5.6.2	Czas i przyczyna wyjścia ze statusu – wzory.....	196
5.6.3	Stowarzyszony model jednoopcyny.....	196
5.6.4	Hipotezy o wymieralności w ułamkowych okresach życia w modelu szkodowości wielorakiej.....	197
5.6.5	Składki jednorazowe brutto w modelach szkodowości wielorakiej.....	198
5.7	Ubezpieczenia dla wielu osób.....	200
5.7.1	Rodzaje statusów.....	200
5.7.2	Przeżywalność grupy osób – wzory.....	202
5.7.3	Składki jednorazowe netto dla ubezpieczeń i rent dla wielu osób.....	202
5.7.4	Ubezpieczenia i renty dla wielu osób – wzory.....	203
	<b>Skorowidz rzeczowy.....</b>	<b>206</b>
	<b>Skorowidz oznaczeń.....</b>	<b>209</b>